ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

PHẠM THỊ THU THỦY

VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA DÃY STERN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

PHẠM THỊ THU THỦY

VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA DÃY STERN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS. TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	tập hợp các số nguyên không âm
$\mathbb{Q}^+$	tập hợp các số hữu tỉ dương
$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$	dãy số Fibonacci
F_n	số Fibonacci thứ n
$(S(n))_{n\in\mathbb{N}}$	dãy Stern
$S(n)$	số Stern thứ n
$(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$	dãy sinh bởi dãy Stern
SEA	thuật toán Euclide chậm
n_r, n_r^*	số thứ tự mà phần tử $S(n_r)$ và $S(n_r^*)$ là phần tử lớn nhất trên hàng thứ r
$L_k(r)$	phần tử lớn nhất trên hàng thứ r
$g_k(n)$	ước chung lớn nhất của $n+k+1$ số liền nhau trong dãy $(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Mở đầu

Tam giác Pascal là khái niệm toán học rất quen thuộc đối với mỗi người học toán. Trong tam giác số này, bắt đầu từ hàng thứ hai, mỗi số ở hàng thứ n, từ cột thứ hai đến cột thứ $n-1$ bằng tổng hai số đứng ở hàng trên cùng cột và cột trước nó. Năm 1858, Stern đã nghiên cứu mảng diatomic, một mảng có nhiều tính chất tương tự tam giác Pascal. Mảng diatomic và dãy diatomic của Stern đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu, tuy nhiên cho đến nay vẫn có nhiều kết quả mới của nó được công bố.

Một trong các kết quả nghiên cứu gần đây nhất về dãy Stern là về giá trị lớn nhất, giá trị lớn thứ hai, giá trị lớn thứ ba của các hàng trong mảng diatomic của dãy Stern.

Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về vấn đề này, tôi chọn đề tài "Về giá trị lớn nhất của dãy Stern" làm đề tài luận văn cao học của mình. Mục tiêu của luận văn là đọc hiểu và trình bày lại hai bài báo [4] và [9].

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung chính của luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày về dãy số Fibonacci, dãy số Stern và một số tính chất của dãy Stern.

Chương 2. Giá trị lớn nhất của dãy Stern. Trong chương trình bày về các giá trị lớn nhất như giá trị lớn nhất, giá trị lớn thứ hai, giá trị lớn thứ ba của dãy $S(n)$. Ngoài ra, chương này còn trình bày thêm về dãy $w(n)$ và giá trị lớn nhất của dãy $w(n)$.

Để hoàn thành bản luận văn này, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS Nông Quốc Chinh, người thầy nhiệt huyết đã truyền thụ kiến thức, đã chỉ ra hướng đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình làm luận văn. Đồng thời, tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn. Qua luận văn này, tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn

bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian làm luận văn.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng hoàn thiện luận văn bằng tất cả sự nhiệt tình và năng lực của mình. Tuy nhiên, luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được những đóng góp quý báu của thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 9 năm 2018

Tác giả luận văn

Phạm Thị Thu Thủy

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Dãy số Fibonacci

Định nghĩa 1.1.1. *Dãy số Fibonacci, ký hiệu bởi* $\{F_n\}$, *được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi sau:*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2,$$

với $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Theo định nghĩa, ta có dãy Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci được xác định bởi công thức Binet dưới đây:

Mệnh đề 1.1.2 (Công thức Binet)**.** *Với* $n \in \mathbb{Z}, \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *và* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, *ta có*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số tính chất của dãy số Fibonacci, các kết quả này được sử dụng trong các chứng minh ở phần sau.

Mệnh đề 1.1.3 ([11, Bổ đề 2.1])**.** *Với số nguyên* $n \geq 1$, *ta có*

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với $n = 1$, ta có

$$F_1^2 - F_0F_2 = 1^2 - 0.1 = 1 = (-1)^0.$$

Giả sử, đẳng thức đúng với $n > 1$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $n+1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} &= (F_n + F_{n-1})^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1} \\
&= 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_nF_{n+1} \\
&= 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}^2 + F_nF_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) - F_n^2 \\
&= F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 \\
&= -(-1)^{n-1} = (-1)^n.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.4 ([11, Bổ đề 2.1])**.** *Với hai số nguyên dương m, n bất kỳ, ta có đẳng thức sau*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m.

Với $m = 1$, ta có

$$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n.$$

Với $m = 2$, ta có

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n.$$

Giả sử, đẳng thức đúng với $m > 2$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $m+1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
F_{n+m+1} &= F_{n+m-1} + F_{n+m} \\
&= F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m + F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \\
&= F_{n-1}\left(F_{m-1} + F_m\right) + F_n\left(F_m + F_{m+1}\right) \\
&= F_{n-1}F_{m+1} + F_nF_{m+2}.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.1.5 ([11, Hệ quả 2.2])**.** *1. Với số nguyên $n \geq 1$, ta có*

$$F_{2n} = F_n\left(F_{n-1} + F_{n+1}\right). \tag{1.3}$$

2. Với mọi số nguyên không âm n, ta có

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \tag{1.4}$$

3. Với mọi $n \geq 1$, chúng ta có

$$F_{2n+1} = F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2}. \tag{1.5}$$

4. Với mọi $n \geq 1$, chúng ta có

$$F_{2n+1} = F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n. \tag{1.6}$$

Hệ quả 1.1.6 (Tính chất d'Ocagne)**.** *Với hai số nguyên m, n và $m \geq n$, ta có*

$$F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n = (-1)^nF_{m-n}. \tag{1.7}$$

Mệnh đề 1.1.7 ([11, Bổ đề 3.1])**.** *Với số nguyên $n \geq 1$, ta có*

$$F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n+2} = (-1)^{n-1}. \tag{1.8}$$

Một cách tổng quát ta có mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.1.8 ([12, Bổ đề 5])**.** *Giả sử a, b, c, d là bốn số nguyên dương với $a + b = c + d$ và $b \geq max\,\{c, d\}$. Khi đó, ta có*

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^{a+1}F_{b-c}F_{b-d}. \tag{1.9}$$

Mệnh đề 1.1.9 ([11, Bổ đề 2.4])**.** *1. Nếu $n \geq 6$ thì ta có*

$$F_{n-2}F_{n-1} > F_{n+1}. \tag{1.10}$$

2. Với mỗi $n \geq 3$, chúng ta có

$$F_{3n-1}(F_n + F_{n-3}) > F_{n-2}F_{n-1}F_nF_{n+1}. \tag{1.11}$$

Mệnh đề 1.1.10 ([12, Bổ đề 15])**.** *1. Với $n \geq 1$, chúng ta có*

$$F_{6n+2} > F_{2n}(F_{2n-2} + F_{2n})(F_{2n+2} + F_{2n+4}). \tag{1.12}$$

2. Với số nguyên dương n, ta có

$$2F_{4n}(F_{4n} + F_{4n+2}) > F_{2n+2}F_{4n+3}(F_{2n-2} + F_{2n}). \tag{1.13}$$

3. Với $n \geq 2$, chúng ta có

$$F_{4n-2}(F_{2n-2} + F_{2n})(F_{2n+2} + F_{2n+4}) > F_{4n}(F_{4n-2} + F_{4n}). \tag{1.14}$$

Mệnh đề 1.1.11 ([12, Bổ đề 40]). *Với mọi $n \geq 1$, chúng ta có*

$$2F_{3n+3} > F_n F_{n+1} F_{n+6}. \tag{1.15}$$

Chứng minh. Ứng dụng đẳng thức (1.2) nhiều lần, ta thu được

$$\begin{aligned}
F_{3n+3} &= F_n F_{2n+2} + F_{n+1} F_{2n+3} > F_n F_{n+3} \\
&= F_n(F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2}) + F_{n+1}(F_n F_{n+2} + F_{n+1} F_{n+3}) \\
&= F_n F_{n+1}(F_n + 2F_{n+2}) + F_{n+1}^2(F_n + 2F_{n+1}) \\
&= F_n F_{n+1}(F_n + F_{n+1} + 2F_{n+2}) + 2F_{n+1}^2 \\
&> F_n F_{n+1}(3F_{n+2} + 2F_{n+1}) \\
&= F_n F_{n+1} F_{n+5}.
\end{aligned}$$

Vì thế ta có

$$\begin{aligned}
2F_{3n+3} - F_n F_{n+1} F_{n+6} &> 2F_n F_{n+1} F_{n+5} - F_n F_{n+1} F_{n+6} \\
&= F_n F_{n+1}(2F_{n+5} - F_{n+6}) > 0.
\end{aligned}$$

Hoàn thành việc chứng minh. □

Mệnh đề 1.1.12 ([12, Bổ đề 42]). *Với mọi $n \geq 2$, chúng ta có*

$$F_{2n} F_{2n+1} - F_{n+1} F_{n+4} F_{2n-2} < 0. \tag{1.16}$$

Chứng minh. Áp dụng các hệ thức (1.6) và (1.9) ta có

$$F_{n+2} F_{n+3} - F_n F_{n+1} = F_{2n+3},$$

$$F_{n+1} F_{n+4} - F_{n+2} F_{n+3} = (-1)^n.$$

Suy ra

$$F_{n+1} F_{n+4} = F_n F_{n+1} + F_{2n+3} + (-1)^n > F_{2n+3} + 2.$$

Vì thế, ta có

$$\begin{aligned}
F_{2n} F_{2n+1} - F_{n+1} F_{n+4} F_{2n-2} &< F_{2n} F_{2n+1} - (F_{2n+3} + 2) F_{2n-2} \\
&= (F_{2n} F_{2n+1} - F_{2n-2} F_{2n+3}) - 2F_{2n-2} \\
&= 2 - 2F_{2n-2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra điều cần chứng minh. □